

**AIKASARJOJEN EPÄLINEAARISESTA
ANALYSOINNISTA**

Tom Kuusela

Sisällys

1. Johdanto	3
2. Approximate Entropy (ApEn)	4
3. Sample Entropy (SampEn)	7
4. Cross Entropies (Cross-ApEn, Cross-SampEn)	9
5. Correlation Dimension (CD)	11
6. Pointwise Correlation Dimension (CDi)	14
7. Fractal Dimension by Dispersion Analysis (FD-DA)	16
8. Fractal Dimension by Curve Length (FD-L)	18
9. Similarity of Distribution (SOD)	21
10. Return Map (RM)	23
11. Detrended Fluctuation Analysis (DFA)	26
12. Spectrum Power-Law (SPL)	29
13. Spectral Entropy (SEn)	30
14. Symbolic Dynamics (SymDyn)	33
15. Lempel-Ziv Entropy (LZEn)	36
16. Stationarity (StatAv)	38
17. Fractional Spectral Radius (FSR)	40

1. Johdanto

Aikasarjojen analysointiin löytyy runsaasti erilaisia menetelmiä ja lähestymistapoja. Tässä esityksessä niistä on poimittu joukko sellaisia, joista on tai ainakin voi olla hyötyä analysoitaessa erityisesti biosignaaleja. Esiteltävät menetelmät poikkeavat suuresti toisistaan, osa edellyttää tarkasteltavalta systeemiltä aivan tiettyä rakennetta ja toiset ovat taas aivan yleisiä karakterisointimenetelmiä. On aina tilanteen mukaan harkittava, missä määrin kukin tapa on järkevä.

Tässä esitetettyjä menetelmiä kutsutaan usein *epälineaariksi* menetelmiksi. Nimitys ei ole kovinkaan osuva, usein jopa harhaanjohtava, menetelmät itse kun eivät ole sen epälinearisempia kuin esimerkiksi tavallinen spektrianalyysi FFT-algoritmia käyttäen. Nimityksen takana oleva ajatus lieneekin se, että aikasarjat tuottava systeemi on epälineaarinen, mikä biologisten systeemien tapauksessa saattaa olla tottakin. Joskus käytetään näistä analyysimenetelmistä myös luonnehdintaa *kaaosteoreettinen lähestymistapa*. Tämä pitää paikkansa vain muutaman menetelmän kohdalla, joissa oletetaan systeemin radan faasivaruudessa olevan kaaottinen pienidimensionoinen attraktori. Tällaisen olemassaolosta biologisissa systeemeissä on todella vähän todisteita. Jos tarkastellaan erityisesti kardiovaskulaarista verenpaineen säätöjärjestelmää ja sen tyyppisimpiä aikasarjoja, kirjallisuudesta löytyy kasvava joukko tuloksia, jotka osoittavat tämän systeemin olevan pikemminkin stokastinen kuin kaaottinen.

Biosignaaliaikasarjat ovat monessa mielessä erityisen hankalia analysoitaviksi. Monet menetelmät vaativat, että aikasarjassa pitää olla jopa tuhansia datapisteitä, mikä saattaa olla pelkästään mittausteknisistä syistä mahdotonta tai erittäin hankalaa. Kun aikasarja on pitkä, tapahtuu mitattavassa biologisessa systeemissä lähes väistämättä merkittäviä muutoksia, se alkaa vaeltaa systeemin parametrivaruudessa, joko sisäsyntyisistä syistä johtuen tai ulkoisten tekijöiden vaikutuksesta. Tämän tyyppinen epästationäärisuus haittaa suuresti kaikkia sellaisia analyysitapoja, joissa koko aikasarjan jokin ominaisuus halutaan pusertaa yhdeksi tunnusluvuksi. Laskenta sinänsä tietenkin yleensä onnistuu, mutta mikä on tällöin tuon luvun merkitys? Muita haittaavia tekijöitä näissä signaaleissa ovat yleensä huomattava kohinataso, hyvinkin rajallisesta digitoinnin amplitudiresoluutiosta johtuva signaalin voimakas diskreettisyys sekä usein muutoin kaaottisen tai stokastisen signaalin päällä oleva voimakas periodinen signaali kuten hengitysmoodulaatio. On hyvä muistaa, että kaikki tässäkin esitetyt laskentamenetelmät on kehitetty fysiikan puolella varsin toisenlaisten, usein melkein ideaalisten, systeemien tutkimiseen.

Huolimatta edellisistä varoittavista sanoista biosignaalien analysointi vaihtoehtoisilla tavoilla voi olla kuitenkin hyödyllistä. Vaikka saatu tulos ei ehkä kuvaakaan juuri sitä ominaisuutta, mihin menetelmä on alunperin suunniteltu, se saattaa silti olla merkittävä etsittäessä korrelaatioita muiden, kliinisesti mielenkiintoisten tekijöiden kanssa. Mutta tuloksia tulkittaessa ja selitysmalleja etsittäessä on syytä muistaa menetelmien taustaolettamukset ja rajoitukset.

2. Approximate Entropy (ApEn)

ApEn mittaa aikasarjan mutkikkuutta, kompleksisuutta, eli mitä pienempi ApEn, sitä säännöllisempi aikasarja on. ApEn:aa voidaan käyttää vaihtoehtoisena tapana mitata signaalin variabiliteettia.

Määrittely

ApEn määritellään seuraavasti. Ensiksi lähtökohtana olevasta aikasarjasta $\{x(i)\}$, missä $i = 1 \dots N$, N on datapisteiden lukumäärä, muodostetaan ns. pseudofaasiavaruuden vektorit

$$u(i) = [x(i), x(i+1), x(i+2), \dots, x(i+m-1)],$$

missä m on upotusdimensio. Vektoreita $u(i)$ voidaan konstruoida kaikkiaan $N-m+1$ kpl. Näiden vektoreiden välinen etäisyys d määritellään vastinkomponenttien maksimaalisena etäisyytenä, eli

$$d[u(i), u(j)] = \max\{|u(i+k) - u(j+k)| : 0 \leq k \leq m-1\}.$$

Seuraavaksi lasketaan kullekin vektorille $u(i)$ niiden muiden vektoreiden $u(j)$ lukumäärä, jotka ovat etäisyydellä r , eli

$$C_i^m(r) = \{\text{niiden indeksien } j \text{ lkm, } j \leq N - m + 1, \text{ joille } d[u(i), u(j)] \leq r\} / (N - m + 1).$$

Normeerauksesta johtuen C-suureet ovat suurimmillaan 1. Määritellään apusuure

$$\Phi^m(r) = (N - m + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln C_i^m(r).$$

Lopulta approksimatiivinen entropia saadaan lausekkeesta

$$ApEn(m, r, N) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r),$$

eli ApEn mittaa sitä (logaritmista) todennäköisyyttä, että m :ssä pisteessä samanlaiset (=lähellä olevat) vektorit ovat samanlaisia myös seuraavassa pisteessä.

ApEn käytännössä

ApEn(m, r, N) riippuu siis kolmesta parametrasta, vertailtavien vektorien pituudesta m , toleranssiparametrasta r ja datapisteiden lukumäärästä N . Biosignaaleilla yleensä valitaan $m = 2$, jolloin menetelmä toimii parhaiten. Kun datapisteiden lukumäärää kasvatetaan,

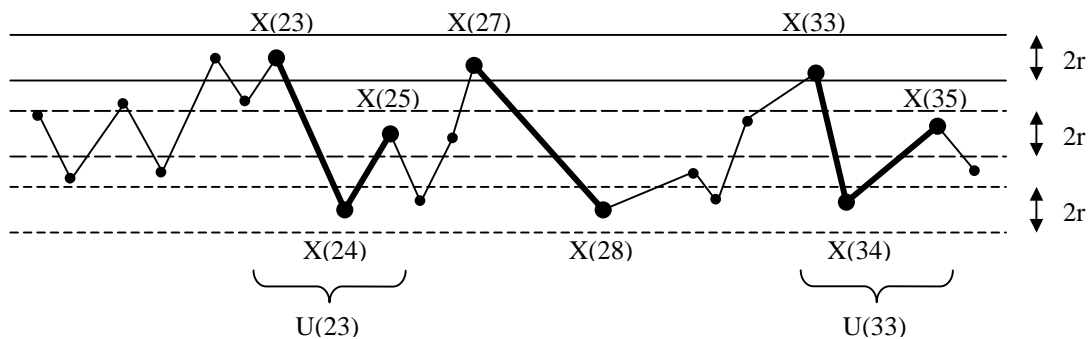
ApEn lähestyy asymptoottisesti lopullista arvoaan. Käytännössä valinta $N > 800$, kun $m = 2$, antaa luotettavan tuloksen. ApEn riippuu varsin voimakkaasti toleranssiparametrin r valinnasta. Jos r valitaan siten, että se on fraktio signaalin standardihajonnasta SD , signaalin ApEn-arvo ei riipu absoluuttisesta variabiliteetistä eikä luonnollisesti myöskään yksiköistä. Tällöin on mahdollista verrata esim. RRI- ja SAP-aikasarjojen entropioita keskenään. Käytetyin valinta on, että $r = 20\%$ SD:stä.

ApEn:n etuja

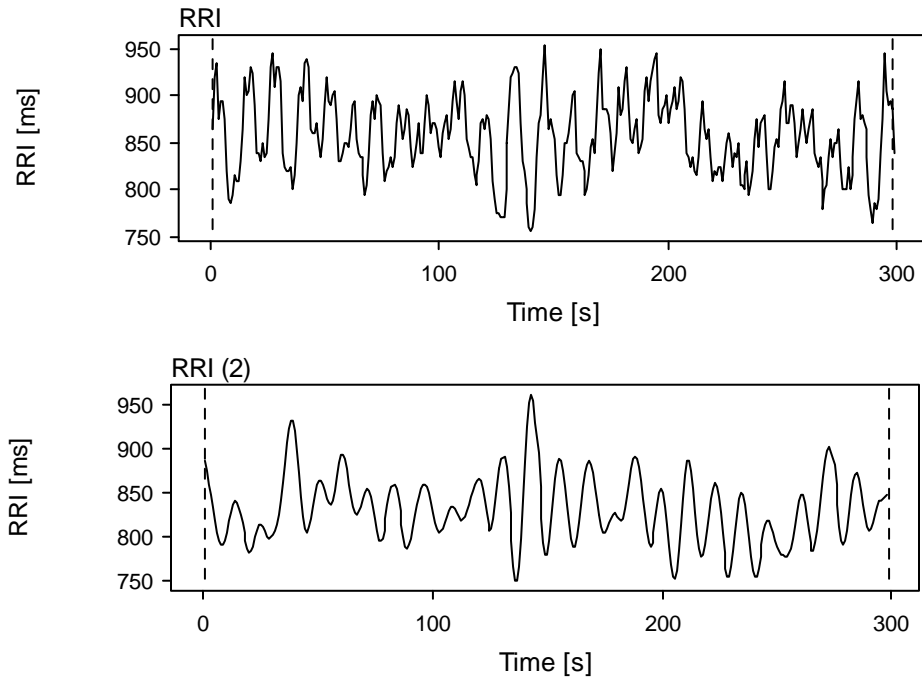
- Mittaa signaalin variabiliteettiä ilman, että muutoksien luonne pitää kiinnittää. Esimerkiksi normaali spektraalianalyysi olettaa vaihtelujen olevan sinimuotoisia.
- Laskennan perusteena ei ole erityisiä oletuksia signaalin tuottaman systeemin sisäisestä rakenteesta tai dynamiikasta.

ApEn: puutteita

- Arvo riippuu kolmesta parametrin r valinnasta, eli suora vertailu edellyttää aina parametrien kiinnittämistä.
- ApEn on herkkä aineiston pienellekin lineaariselle trendille, koska vertailussa käytetään signaalin absoluuttisia arvoja. Tätä taipumusta voidaan vähentää tarkastelemalla signaalin peräkkäisten datapisteiden erotuksia.
- ApEn ei periaatteessa ole herkkä yksittäisille data-arvon muutoksille, mutta jos toleranssiparametri sidotaan hajontaan, tilanne ei enää välttämättä ole näin.



Kuva 1. Esimerkki siitä, miten tapauksessa $m = 2$ haetaan lähellä olevia vektoreita. Vektoria $[x(23), x(24)]$ käytettäessä vertailuun löytyy kaksi lähellä olevaa vektoria, $[x(27), x(28)]$ ja $[x(33), x(34)]$, eli ne kasvattavat suuretta $C_{23}^2(r)$. Kun vertaillaan myös seuraavaan komponenttiin $x(25)$, ainoastaan vektori $[x(33), x(34), x(35)]$ on lähellä, eli vain se kasvattaa suuretta $C_{23}^3(r)$.



Kuva 2. Kaksi RRI-signaalia, joilla SD on sama, mutta ylemmällä ApEn = 1.149 ja alemmalle ApEn = 0.583. Laskuissa käytetty asetuksia $m = 2$ ja $r = 20\%$ SD:sta.

Viitteitä

Pincus S. M., Goldberger A. L. Physiological time-series analysis: what does regularity quantify? *Am. J. Physiol.* **266** (*Heart. Circ. Physiol.*): H1643 – H1656, 1995

Pincus S. Approximate entropy (ApEn) as a complexity measure. *CHAOS* **5**: 110 – 117, 1995

Bettermann H., Van Leeuwen P. Evidence of phase transitions in heart period dynamics. *Biol. Cybern.* **78**: 63 – 70, 1998

Cysarz D., Bettermann H., Van Leeuwen P. Entropies of short binary sequences in heart period dynamics. *Am. J. Physiol.* **278** (*Heart Circ. Physiol.*): H2163 – H2172, 2000

3. Sample Entropy (SampEn)

SampEn on hyvin samankaltainen suure kuin ApEn, mutta sen laskentatavassa on pieni ja ratkaiseva ero. Kun ApEn:aa laskettaessa haetaan kullekin vertailtavalle vektorille lähellä olevien vektorien lukumäärä, vertailuun otetaan aina mukaan myös vertailtava vektori itse. Tällä varmistetaan se, että $C_i^m(r)$ –suureet ovat aina nolasta poikkevia, mikä on välttämätöntä, koska niistä myöhemmin lasketaan logaritmi. Tämä aiheuttaa sen, että ApEn antaa useimmiten tuloksen, joka viittaa suurempaan signaalin säännöllisyyteen kuin todellisuudessa on asian laita.

SampEn lasketaan tavalla, joka poistaa suurimmaksi osaksi edellä kuvatun vinoutuman tuloksissa. Laskettaessa lähellä olevien vektorien lukumäärää poissuljetaan vertailu itseensä:

$$C_i^m(r) = \{ \text{niiden indeksien } j \text{ lkm, } j \neq i, j \leq N - m + 1, \text{ joille } d[u(i), u(j)] \leq r \} / (N - m + 1).$$

Myös apusuure Φ määritellään uudestaan ilman logaritmeja:

$$\Phi^m(r) = (N - m + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{N-m+1} C_i^m(r).$$

Nyt SampEn määritellään lausekkeena

$$\text{SampEn}(m, r, N) = \ln(\Phi^m(r) / \Phi^{m+1}(r)).$$

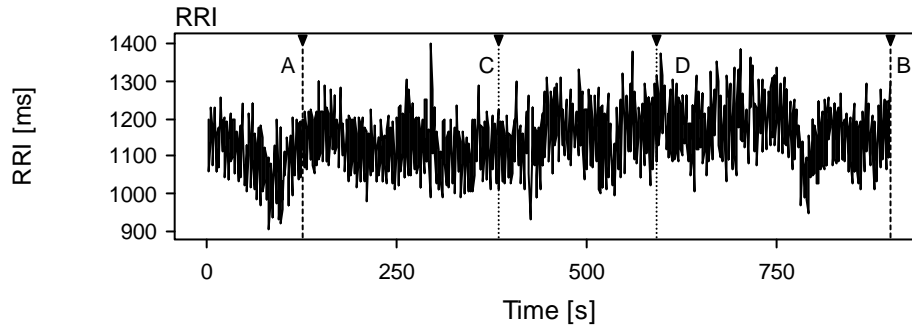
SampEn:n tulkinta on täsmälleen sama kuin ApEn:n, samoin sen käyttö. Riippuvuus toleranssiparametrissa r ja datapisteiden lukumäärästä N on kuitenkin erilainen. ApEn saavuttaa maksiminsa tietyllä r :n arvolla, mutta SampEn pienenee monotonisesti, kun r kasvaa. SampEn on myös periaatteessa riippumaton datapisteiden lukumäärästä N , mutta pienillä N :n arvoilla sen statistinen luotettavuus on luonnollisesti heikko. Kun r ja N ovat riittävän suuria, SampEn ja ApEn antavat saman tuloksen.

SampEn:n etuja

- Antaa periaatteessa luotettavamman arvion signaalin kompleksisuudesta kuin ApEn.
- Voidaan käyttää huomattavasti lyhyemmillä aikasarjoilla kuin ApEn, jopa alle 200:lla datapisteellä.

SampEn:n puutteita

- Vertailu ApEn kanssa voi olla vaikeaa samoillakin parametrien arvoilla, jos parametrit valittu huonosti.



Kuva 3. RRI-signaali, jossa on laskettu ApEn ja SampEn eri mittaisista ajanjaksoista. Välillä A – B on 800 pistettä, jolloin ApEn = 1.331 ja SampEn = 1.695; välillä C – D on 200 pistettä, jolloin ApEn = 0.808 ja SampEn = 1.725. Tulos osoittaa, että SampEn antaa hyvän arvion jo huomattavasti lyhyemmälle jaksolle.

Viitteitä

Richman J. S., Moorman J. R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J. Physiol.* **278** (Heart. Circ. Physiol.): H2039 – H2049, 2000

4. Cross Entropies (Cross-ApEn, Cross-SampEn)

Sekä ApEn että SampEn antavat mahdollisuuden laskea keskinäistä kompleksisuutta kahden signaalin välillä. Tällöin pyritään arvioimaan signaalien välistä synkronisuutta, mutta ei ajallisessa mielessä vaan tarkastelemalla kummassakin signaalissa esiintyviä tyypillisiä kuvioita tai hahmoja. Jos ristientropia on alhainen, signaalien käyttäytyminen muistuttaa toisiaan.

Ristientropiat lasketaan kuten tavallisetkin, mutta vertailtavat vektorit otetaan pareittain aina kahdesta aikasarjasta. Jos kahden signaalin aikasarjat ovat $\{x(i)\}$ ja $\{y(i)\}$, $i = 1 \dots N$, muodostetaan pseudofaasiavaruuden vektorit kuten aikaisemminkin:

$$u(i) = [x(i), x(i+1), x(i+2), \dots, x(i+m-1)],$$

$$v(i) = [y(i), y(i+1), y(i+2), \dots, y(i+m-1)].$$

Tässä tapauksessa vektorien välinen etäisyys on

$$d[u(i), v(j)] = \max \{ |u(i+k) - v(j+k)| : 0 \leq k \leq m-1 \}.$$

Tämän jälkeen laskut etenevät täsmälleen samalla tavalla kuin yhdellä signaalilla. ApEn- ja SampEn-menetelmät poikkeavat käytössä toisistaan, sillä ApEn:llä ei ole lainkaan varmaa, että jokaiselle toisesta aikasarjasta otetulle vektorille löytyy yhtään lähellä olevaa vektoria; jos näin tapahtuu, Cross-ApEn:aa ei voida laskea. Cross-SampEn on tässä suhteessa huomattavasti sallivampi, sillä riittää, että edes yhdelle vektorille löytyy ainakin yksi lähellä oleva vektori toisesta aikasarjasta. Cross-SampEn on bipolaarinen eli tulos ei riipu siitä, missä järjestyksessä signaaleja verrataan, päinvastoin kuin Cross-ApEn.

Cross-ApEn ja Cross-SampEn käytännössä

Parametrien valintojen suhteen pätevät samat ehdot kuin yksittäisen signaalin entropioiden kohdalla. Jotta eri signaalien vertailu olisi mielekäästä, on yleensä välttämätöntä normeerata molemmat signaalit, erityisesti siinä tapauksessa, että signaalit edustavat eri suureita. Tämä tehdään yleensä seuraavasti:

$$x^*(i) = (x(i) - \langle x \rangle) / SD(x),$$

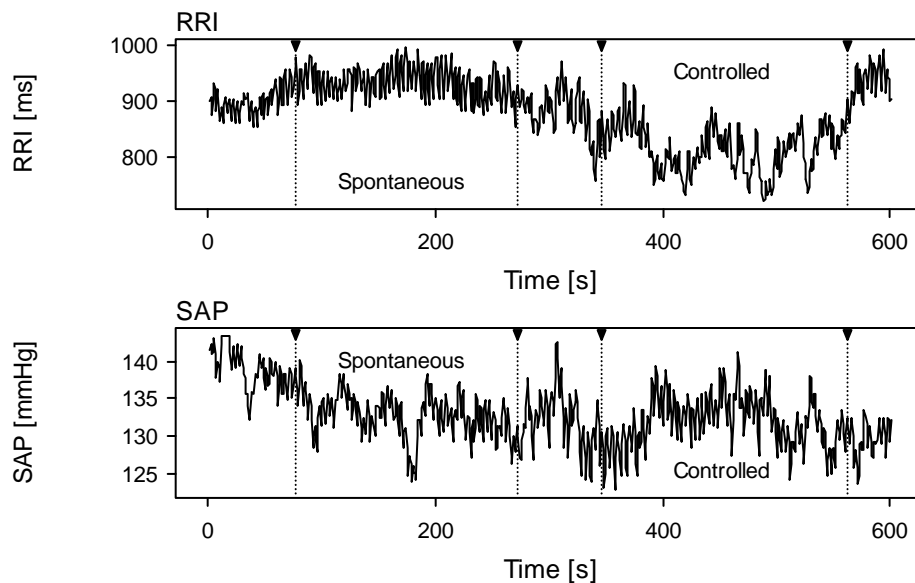
missä $\langle x \rangle$ on signaalin keskiarvo ja $SD(x)$ sen standardihajonta.

Cross-ApEn:n ja cross-SampEn etuja

- Menetelmällä voidaan verrata signaaleja aivan uudella tavalla ilman, että rajoitutaan puhtaasti ajallisen synkronisation tarkasteluun.

Cross-ApEn:n ja Cross-SampEn puutteita

- Ristientropiat eivät ole kovin helposti intuitiivisesti hahmotettavissa, mistä syystä tulosten tulkinta voi olla vaikeaa.



Kuva 4. RRI- ja SAP-aikasarjat, jossa potilas on hengittänyt alussa spontaanisti ja sen jälkeen kontrolloidusti 0.25 Hz taajuudella. RRI SampEn(spont) = 1.562, SAP SampEn (spont) = 1.612 ja RRI-SAP Cross-SampEn(spont) = 2.028; RRI SampEn(contr) = 1.493, SAP SampEn (contr) = 1.632, RRI-SAP Cross-SampEn(contr) = 1.734. RRI:llä entropia pienenee hieman, kun hengitys muuttuu kontrolloiduksi, mutta SAP:lle se pysyy lähes samana, sen sijaan ristientropiassa tapahtuu selvä muutos.

Viitteitä

Richman J. S., Moorman J. R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J. Physiol.* **278** (Heart. Circ. Physiol.): H2039 – H2049, 2000

Pincus S., Singer B. H. Randomness and degrees of irregularity. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **93**: 2083 – 2088, 1996

Pincus S. M., Mulligan T., Iranmanesh A., Gheorghiu S., Godshalk M., Veldhuis J. D. Older males secrete luteinizing hormone and testosterone more irregularly, and jointly asynchronously, than younger males. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **93**: 14100 – 14105, 1996

5. Correlation Dimension (CD)

Systeemin toimintaa voidaan kuvata mittaamalla sen attraktorin (rata, jota kohti systeemi konvergoi) dimensio. Erityisesti kaaottisilla systeemeillä attraktori voi olla fraktaalinen, jolloin sen dimensio ei ole kokonaisluku. Attraktorin dimension tunteminen saattaa biologisillakin systeemeillä antaa arvokasta tietoa taustalla vaikuttavan dynamiikan luonteesta. Korrelaatioidimensiolle käytetään myös merkintää D_2 .

Laskennan lähtökohtana on jälleen systeemin moniulotteisen faasiavaruuden rekonstruktioiminen aikasarjasta $\{x(i)\}$, $i = 1 \dots N$, käyttäen pseudofaasiavaruuden vektoreita

$$u(i) = [x(i), x(i+1), x(i+2), \dots, x(i+m-1)],$$

missä m on upotusdimensio. Seuraavaksi lasketaan kullekin vektorille $u(i)$ kuinka monta attraktorin pistettä sijaitsee tarkastelupisteestä katsottuna etäisyydellä r

$$C_i^m(r) = \{ \text{niiden indeksien } j \text{ lkm, } j \leq N - m + 1, \text{ joille } d[u(i), u(j)] \leq r \} / (N - m + 1),$$

missä etäisyys d määritellään (esim. ApEn-metodista poiketen) normaalina euklidisena etäisyytenä

$$d[u(i), u(j)] = \left(\sum_{k=1}^m |u(i;k) - u(j;k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Tämä jälkeen lasketaan $C_i^m(r)$ -suureiden keskiarvo yli kaikkien vektoreiden, jolloin saadaan ns. korrelaatiointegraali

$$C^m(r) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} C_i^m(r).$$

Korrelaatioidimensio CD määritellään raja-arvona

$$CD(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C^m(r)}{\log r}.$$

Käytännössä äärellisellä data-aineistolla näitä raja-arvoja ei pystytä laskemaan, vaan CD määritetään regressiosuoran kulmakertoimena laskettuna log-log-esityksessä riittävän lineaarisen alueen yli.

CD käytännössä

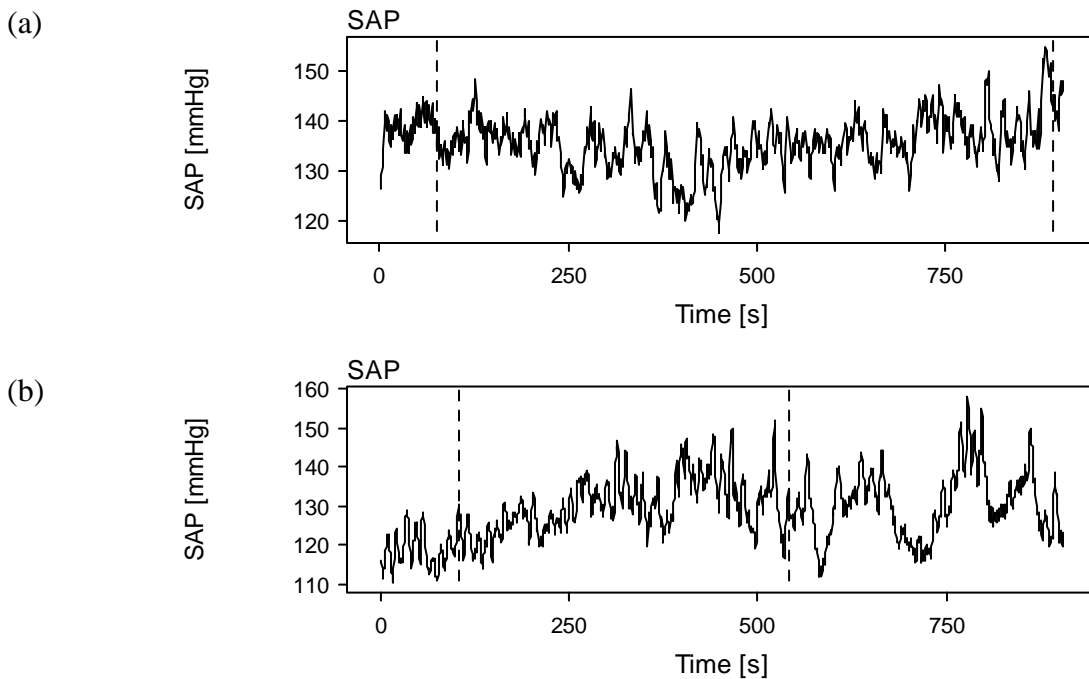
Kun CD:ta lasketaan, pitää upotusdimensio m valita siten, että se on vähintään $2*D$, missä D on kuin tutkittavan systeemin aito dimensio eli todellisten dynaamisten muuttujien lukumäärä. Jotta korrelaatiointegraali todella kuvaisi oikein attraktorin rakennetta, pitäisi datapisteitä olla vähintään 10^m kpl. Esimerkiksi tutkittaessa verenpaineen säätöjärjestelmää voidaan olettaa, että dynaamisten muuttujien lukumäärä >4 , joten aikasarjojen on oltava hyvin pitkiä. Lisäksi käytännössä on lähes mahdotonta löytää sellaista etäisyyden r aluetta, jossa $\log C^m(r)$ muuttuisi lineaarisesti $\log r$:n funktiona, syynä datan sisältämä kohina tai sen epästationäärisuus. Näistä rajoituksista johtuen oikean korrelaatioidimension laskeminen biosignaaleille on lähes mahdotonta, mutta siitä huolimatta tämä lähestymistapa saattaa olla hyödyllinen. Lupaavia tuloksia on saatu valitsemalla $m = 20$ ja hakemalla keskimääräinen kulmakerroin alueella $0.01 < C^m(r) < 0.1$. Näin laskettua suuretta, yllä olevat rajoitukset muistaen, kutsutaan modifioiduksi korrelaatioidimensioksi. Se ei pysty tarkasti ilmoittamaan systeemin todellista dimensiota, mutta antaa kuitenkin mitan systeemin kompleksisuudelle, ts. kun CD kasvaa, systeemi tulee kompleksisemmaksi.

CD:n etuja

- Menetelmä antaa vaihtoehdoisen tavan mitata systeemin kompleksisuutta.

CD:n puutteita

- Menetelmä pohjautuu pieniulotteisen (kaaottisen) attraktorin olemassaoloon, jollaista biologisilla systeemeillä ei välttämättä ole löydettävissä.
- Käytännön biosignaaliaikasarjoille CD:n tarkka laskeminen on lähes mahdotonta.
- Parametrien m ja N valintavalinta vaikuttaa oleellisesti lopputulokseen.
- Pitkille aikasarjoille CD:n laskeminen on erittäin hidasta.



Kuva 5. Kaksi SAP-aikasarjaa mitattuna potilaan ollessa levossa. (a) on normaali tilanne, jolloin $CD = 6.091$; tapauksessa (b) potilaalle on annettu terbutaliinia, jolloin $CD = 3.545$. Kummassakin tapauksessa datapisteitä on 800 (alue merkitty katkoviivoilla), mutta erilaisen keskimääräisen sykkeen takia aikavälit poikkeavat toisistaan. Lääkeaine näyttää dimensioanalyysin perusteella vähentävän voimakkaasti systeemin kompleksisuutta.

Viitteitä

Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* **31**: 346 – 349, 1983

Kantz H., Schreiber T. Dimension estimates and physiological data. *CHAOS* **5**: 143 – 154, 1995

Fell J., Röschke J., Schäffner C. Surrogate data analysis of sleep electroencephalograms reveals evidence for nonlinearity. *Biol. Cybern.* **75**: 85 – 92, 1996

Yum M-K, Kim N-S. et al. Non-linear cardiac dynamics and morning dip: an unsound circadian rhythm. *Clin. Physiol.* **19**: 56 – 67, 1999

6. Pointwise Correlation Dimension (CDi)

Pisteittäinen korrelaatioidimensio määritellään hyvin samankaltaisesti kuin tavallinen CD:kin, mutta sen sijaan, että se ilmoitettaisiin yhdellä luvulla koko aikasarjalle, se lasketaan ajan funktiona. Tämä antaa mahdollisuuden tarkastella systeemin luonteen muuttumista ajassa, joka on erityisen tärkeää epästationäärisissä tapauksissa. Pisteittäiselle korrelaatioidimensiolle käytetään myös merkintää D2i.

CDi lasketaan samalla tavalla kuin CD, mutta ilman keskimääräistystä yli koko aikasarjan. Kuten korrelaatioidimensiollakin, ensiksi lasketaan tarkastelupisteestä etäisyydellä r olevien pseudofaasiavaruuden vektorien lukumäärä eli suure $C_i^m(r)$. Seuraavaksi haetaan regressiosuora $\log C_i^m(r) - \log r$ -kuvaukselle. Tuon suoran kulmakerroin on pisteittäinen korrelaatioidimensio $CDi(k)$, jossa $k = 1 \dots N-m+1$, m upotusdimensio ja N datapisteiden lukumäärä. Koska CDi lasketaan jokaiselle aikasarjan pisteelle, saadaan korrelaatioidimensio ajan funktiona.

CDi käytännössä

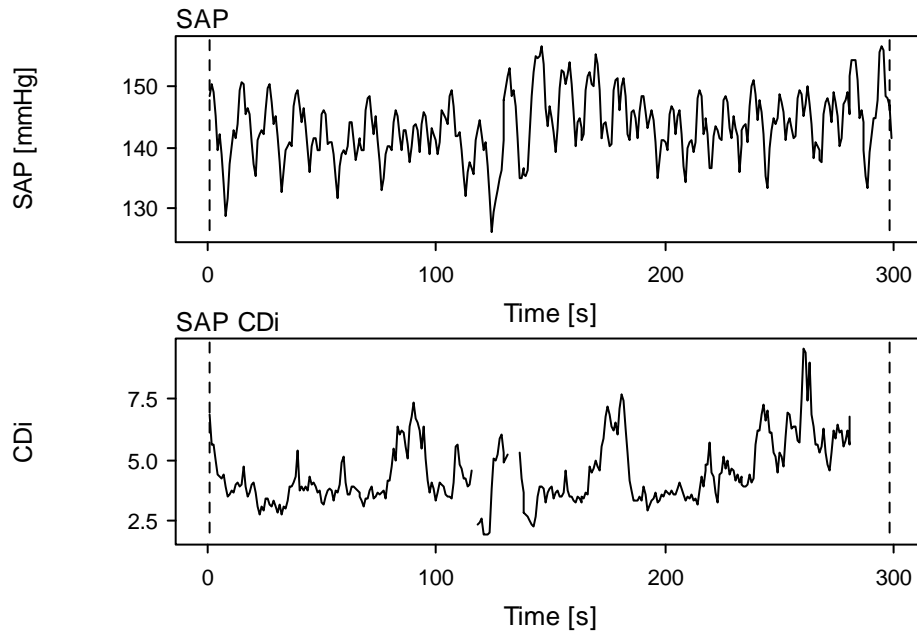
Kun regressiosuoraa haetaan, on jälleen valittava alue, jossa relaatio on lineaarinen, sekä käytettävä riittävän suurta upotusdimension arvoa. Pisteittäistä korrelaatioidimensiota laskettaessa voidaan toimia samoin kuin tavallisellakin korrelaatioidimensiolla ja kiinnittää $m = 20$ ja valitsemalla alue $0.01 < CDi(r) < 0.1$. Lisäksi on huomattava, että vaikka CDi lasketaan jokaisessa pisteessä ja siksi se voi periaatteessa seurata datassa tapahtuvia muutoksia, jokaisessa pisteessä CDi:n laskeminen kuitenkin edellyttää jokaisen muun pisteen läpikäymistä. Tästä syystä CDi ei sovellu selkeästi epästationääriselle aikasarjalle. Siksi on käytännössä hyvä käyttää sellaista lisäehtoa, että laskettaessa joka pisteessä log-log-kuvauksessa regressiosuoraa, saadun suoran korrelaatiokerroin on oltava yli tietyn rajan, esim. vähintään 0.8; jos tämä kriteeri ei täyty, CDi-arvo ko. pisteessä ei ole luotettava.

CDi:n etuja

- Korrelaatioidimensio ajan funktiona antaa hieman tietoa aikasarjan sisäisistä muutoksista, mikä jo sinällään voi olla hyödyllistä.

CDi:n puutteita

- Epästationääriselle aikasarjalle CDi ei välttämättä toimi oikein.



Kuva 6. SAP-aikasarja ja vastaava pisteittäinen korrelaatioidimensio CDi. Kuvasta nähdään, että CDi keskimäärin kasvaa lievästi loppua kohden, mutta välillä sillä on varsin poikkeaviakin arvoja. CDi-käyrässä on katkokohta, koska sitä ei ole voitu laskea joka kohdassa, kun on vaadittu regressiosuoralle vähintään 0.8 korrelaatiokerrointa.

Viitteitä

Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A. Dimension of chaotic attractors. *Physica D* **7**: 153 – 180, 1983

Mayer-Kress G., Yates F. E. et al. Dimensional analysis of nonlinear oscillations in brain, heart, and muscle. *Math. Biosci.* **90**: 155 – 182, 1988

7. Fractal Dimension by Dispersion Analysis (FD-DA)

Dimensioanalyysia voidaan aikasarjoille tehdä myös tarkastelemalla pikemminkin itse aikasarjaa kuvaavaa käyrää kuin signaalin takana olevaa dynaamista systeemiä. Tällainen lähestymistapa muistuttaa siten lähinnä kuva-analyysia. Koska mutkikas käyttäytyminen näkyy aikasarjassa signaalin ainakin näennäisen satunnaisina muutoksina, signaalia vastaavan käyrän fraktaalisuuden tutkiminen antaa epäsuoraa tietoa myös itse systeemistä.

Dispersioanalyysiin pohjautuvassa menetelmässä aikasarjasta lasketaan ensin normaali standardihajonta:

$$SD(1) = \frac{1}{N} \sqrt{N \sum_{i=1}^N x^2(i) - \left(\sum_{i=1}^N x(i) \right)^2},$$

missä $\{x(i)\}$ on tarkasteltava aikasarja, jossa on N datapistettä. Seuraavaksi aikasarjasta lasketaan aina kahden vierekkäisen datapisteen keskiarvo, jolloin näistä keskiarvoista saadaan uusi aikasarja, jossa $N/2$ datapistettä. Tälle uudelle aikasarjalle lasketaan standardihajonta $SD(2)$. Tätä jatketaan käyttämällä ryhmien kokoja 4, 16, 32 jne., kunnes aikasarjassa on pisteitä vähemmän kuin 4. Näin ollaan saatu sarja hajontalukuja $SD(m)$. Kun $\log SD(m)$ piirretään suureen $\log m$ funktiona, pisteet asettuvat suoralle, jos alkuperäinen aikasarjakäyrä oli fraktaalinen. Kyseisen fraktaalisen objektin dimensio FD-DA = 1 - suoran kulmakerroin. Fraktaalidimensio voi näin määriteltynä vaihdella välillä 1 – 1.5, jolloin 1 edustaa vakiona pysyvän signaalin tapausta ja 1.5 maksimaalista fraktaalista rakennetta.

FD-DA käytännössä

Jos tutkittava käyrä ei ole puhtaasti fraktaalinen, eli se esimerkiksi sisältää merkittävästi kohinaa, eivät $SD(m)$ arvot asetut log-log-esityksessä tarkasti suoralle. Etenkin automaattisessa analyysissä, jolloin tätä suoraa ei visuaalisesti tarkasteta, on tärkeää asettaa jokin kriteeri lineaarisuudelle. Tällaisena toimii jälleen hyvin sovitetun regressiosuoran korrelaatiokerroin, jolta voidaan vaatia esim. minimitaso 0.8.

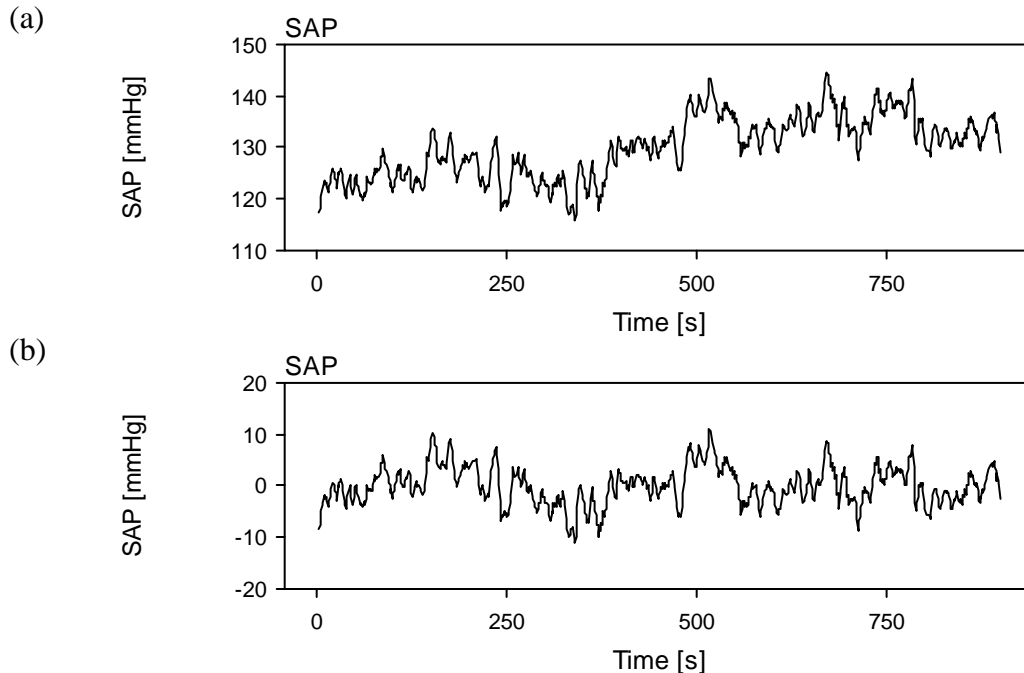
Tämä menetelmä sopii kaikkien aikasarjakäyrien tutkimiseen, sillä vaikka SD-luvut ovat sinällään riippuvaisia suureen yksiköstä, skaalaus näkyy log-log-esityksessä vakiopoikkeamana, joka ei vaikuta dimensioon.

FD-DA:n etuja

- Ei edellytä mitään taustaolettamuksia systeemin luonteesta tai dynamiikasta.
- Nopea laskea.

FD-DA:n puutteita

- Koska menetelmässä tutkitaan suoraan mitattua signaalikäyrää, kaikki mittausepätaarkkuudet ja häiriöt vaikuttavat suoraan lopputulokseen.
- Herkkä signaalin taustatrendille.



Kuva 7. SAP-aikasarja. (a) alkuperäinen signaali, jolloin $FD-DA = 1.037$ ja (b) taustatrendi poistettu, jolloin $FD-DA = 1.199$. Trendin poisto vaikuttaa voimakkaasti fraktaalidimensioon.

Viitteitä

Bassingthwaighte J. B., Raymond G. M. Evaluation of the dispersional analysis method for fractal time series. *Ann. Biomed. Eng.* **23**: 491 – 505, 1995

Yum M-K, Kim N-S. et al. Non-linear cardiac dynamics and morning dip: an unsound circadian rhythm. *Clin. Physiol.* **19**: 56 – 67, 1999

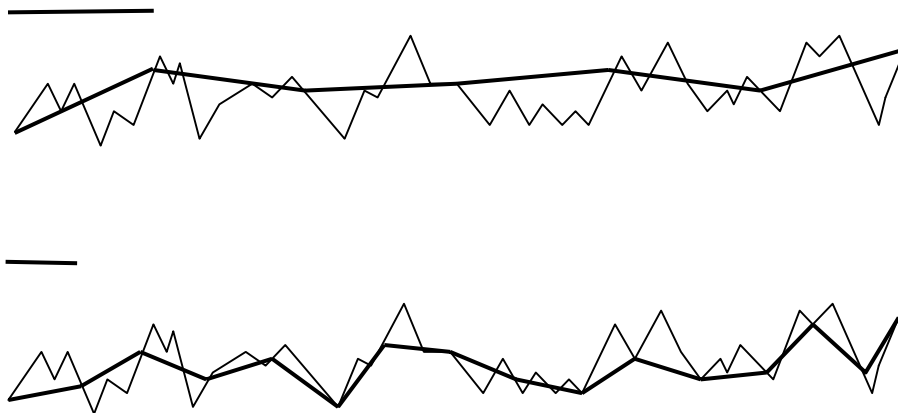
8. Fractal Dimension by Curve Length (FD-L)

Tässäkin menetelmässä tarkastellaan itse signaalikäyrää ja pyritään määrittämään sille fraktaalinen dimensio.

FD-L:n laskenta perustuu signaalikäyrän pituuden mittaamiseen käyttäen eri mittaisia mittatikkuja, eli tutkitaan, miten käyrän pituusarvo muuttuu eri mittaskaaloissa. Kuvassa 8 on esitetty tilanne kahdella eri mittaisella mittatikulla, joilla signaalikäyrää on arvioitu. Mitä lyhyempi on mittatikun pituus, sitä paremmin niillä tavoitetaan signaalin muoto, samalla niitä luonnollisesti tarvitaan enemmän. Fraktaalilla käyrällä tikkujen lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti, kun mitan pituus lyhenee. Jos $N(L)$ on L -mittaisten mittatikkujen lukumäärä, määritellään fraktaalidimensio raja-arvona

$$FD = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\log N(L)}{\log(1/L)}.$$

Raja-arvoa ei käytännössä voida määrittää, mutta kun esitetään $\log N(L)$ $\log(1/L)$:n funktiona ja haetaan kuvaajan regressiosuora, suoran kulmakerroin antaa fraktaalidimension.



Kuva 8. Signaalikäyrä (ohut viiva) on arvioitu mittatikuilla (paksu viiva). Kun mittatikku on pitkä (yläkuva), niitä tarvitaan 6 kpl, mutta kun tikun pituus puolitetaan, niitä tarvitaan 15 kpl. Mitä lyhyempi mittatikku, sitä paremmin niillä voidaan tavoittaa käyrän muoto.

FD-L käytännössä

Mittatikkujen lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti tikun pituuden lyhentyessä vain tiettyyn rajaan asti. Kun käyrän pienimmätkin rakenteet on tavoitettu, eksponenttilaki ei enää päde. Siksi fraktaalidimensiota laskettaessa on log-log-esityksessä rajoituttava tähän alueeseen regressiosuoraa sovitettaessa. Esim. RRI-intervallilla tämä raja on yleensä yhden sykkeen väli, mutta hitaammin muuttuvilla, tiheään näytteistetyillä signaaleilla raja voi olla paljon korkeammalla. FD-L saa arvoja >1 .

Jotta menetelmällä voisi mitata fraktaalidimensioita vertailukelpoisesti erilaisista signaaleista, ne pitää ensin normeerata. Luonnollisin tapa on käyttää normeerausta

$$x^*(i) = (x(i) - \langle x \rangle) / SD(x),$$

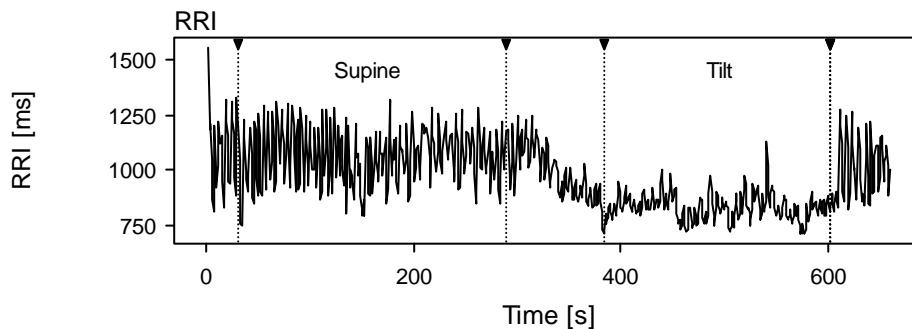
missä $\langle x \rangle$ on signaalin keskiarvo ja $SD(x)$ sen standardihajonta.

FD-L:n etuja

- Menetelmä ei oleta systeemiltä mitään erityistä dynaamista käyttäytymistä.
- Ei ole erityisen herkkä signaalin hitaille trendeille.

FD-L:n puutteita

- Herkkä kohinalle, jos se on samaa suuruusluokkaa kuin signaalin “oikeat” pienimmät muutokset.



Kuva 9. RRI-aikasarja mitattuna kippipöytätestissä. Vasemmanpuoleisessa alueessa, kun potilas on vaakasuorassa, $FD-L = 1.923$, ja oikeanpuoleisessa pystyasennossa $FD-L = 1.342$.

Viitteitä

Chau N. P., Chanudet X., Bauduceau B., Gautier D., Larroque P. Fractal dimension of heart rate and blood pressure in healthy subjects and in diabetic subjects. *Blood Pressure* **2**: 101 – 107, 1993

Gough N. A. J. Fractal analysis of foetal heart rate variability. *Physiol. Meas.* **14**: 309 – 315, 1993

9. Similarity of Distribution (SOD)

Tätä menetelmää soveltuu aikasarjan stabiilisuuden mittaamiseen. Jos aikasarja on selkeästi epästabiili, eli se vaeltaa systeemin parametriavaruudessa (jolloin systeemin muuttuu merkittävästi ajan mukana), on erilaisten lineaaristen ja epälineaaristen analyysimenetelmien käytössä oltava hyvin varovainen. SOD voi myös paljastaa sen, onko systeemi selkeästi stokastinen.

SOD:n laskenta tapahtuu seuraavasti:

- (i) aikasarjasta otetaan ajanhetkestä t alkaen ajan W -mittainen jakso
- (ii) lasketaan tämän jakson amplitudijakauma käyttäen sopivaa jakoväliä
- (iii) amplitudijakaumasta tehdään todennäköisyysjakauma $p_i(t)$ jakamalla se jakauman kokonaisintegraalilla; $i = 1 \dots h$, h on jakovälien lukumäärä
- (iv) lasketaan samanlainen todennäköisyysjakauma toiselle W -mittaiselle jaksolle, joka alkaa ajankohdasta $t+\tau$, eli $p_i(t+\tau)$
- (v) lasketaan näiden kahden todennäköisyysjakauman välinen autokorrelaatio

$$SOD(t) = \sum_{i=1}^h p_i(t)p_i(t+\tau)$$

- (vi) tehdään yllä kuvattu lasku kaikissa aikasarjan pisteissä. Tuloksena saadaan SOD ajan funktiona

SOD saa arvoja välillä $0 \dots 1$. SOD on lähellä nollaa, jos todennäköisyysjakaumat ovat hyvin leveitä, kuten on tyypillisesti stokastiselle systeemille, tai jos vertailtavat jakaumat poikkeavat täysin toisistaan, kuten on asian laita epästabiilille systeemille. Toisaalta, jos jakaumilla on maksimi lähes samassa kohdassa, $SOD \approx 1$, jolloin systeemi on stabiili ja sen käyttäytyminen hyvin ennustettavissa.

SOD käytännössä

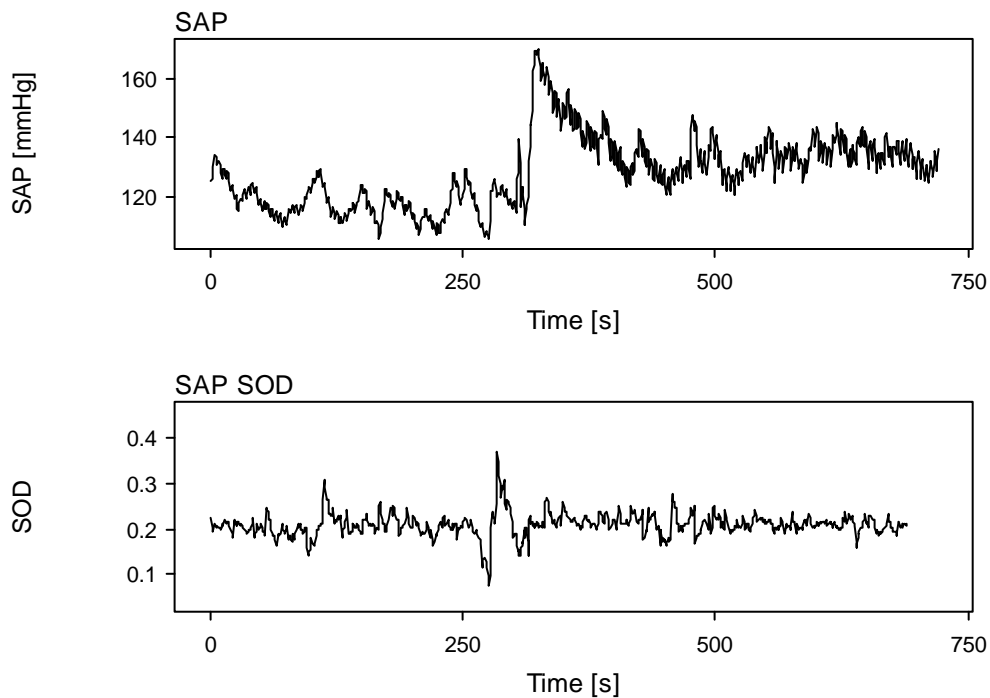
Jakaumia laskettaessa siirtymäparametrin τ valinta vaikuttaa suoraan siihen, kuinka nopeita muutoksia aikasarjan stabiilisuudessa voidaan havaita. Myös ikkunan leveyden W vaikuttaa ajalliseen resoluutioon, mutta jos W on kovin lyhyt, tilastollinen luotettavuus alkaa yksittäiselle SOD-arvolle voimakkaasti heikentyä. Käytännössä on pyrittävä hakemaan optimaalinen kompromissi näiden parametrien kesken. Lisäksi on huomioitava, että jakaumia laskettaessa jakoväli on siten valittu, että jakaumat ovat riittävän yksityiskohtaisia.

SOD:n etuja

- Menetelmä on yleinen stabiiliisuuden testi, eikä se edellytä systeemiltä mitään erityisluonnetta.

SOD:n puutteita

- Parametrien valinta voi vaikuttaa voimakkaasti tulokseen.
- Ei erottele hyvin epästationääristä ja stokastista aikasarjaa toisistaan.



Kuva 10. RRI- ja SOD-aikasarjat, kun potilas on ensin makuuasennossa ja sen jälkeen nousee pystyasentoon. Vaikka SAP muuttuu selkeästi, SOD ei muutu merkittävästi: pystyasennossa SAP-signaalin todennäköisyysjakauman muoto ei muutu. Laskuissa on käytetty 30 sekunnin aikaikkunaa, jota on siirretty aina 15 sekuntia eteenpäin.

Viitteitä

Zochowski M. Autocorrelations of R-R distributions as a measure of heart variability. *Phys. Rev. E* **56**: 3725 – 3727, 1997

10. Return Map (RM)

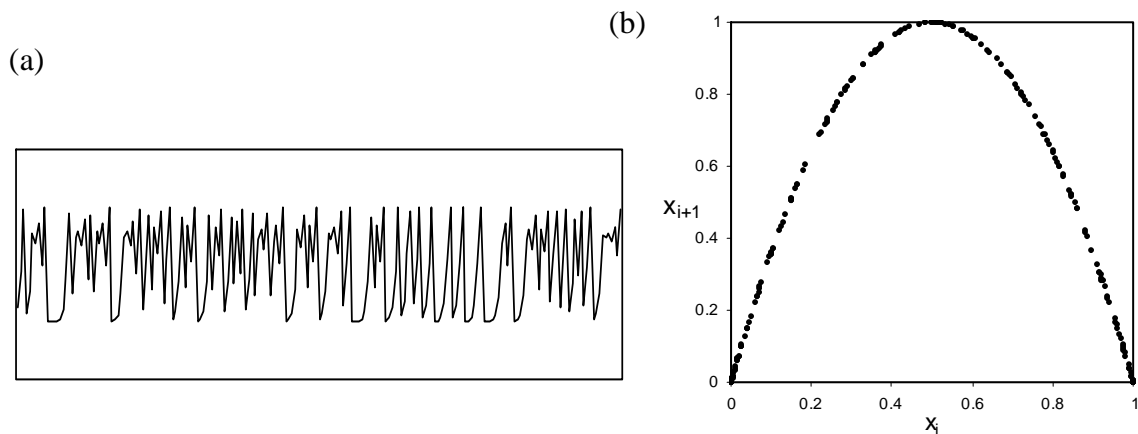
Dynaamista systeemiä voidaan matemaattisesti kuvata useimmissa tapauksissa differentiaaliyhtälöryhmällä. Jos muuttujat saavat arvoja vain tietyillä diskreeteillä ajanhetkillä, kuten esimerkiksi RRI-aikasarjassa on kyse, differentiaaliyhtälöt voidaan korvata diskreeteillä yhtälöillä. Yleisesti kuvaus on silloin muotoa

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F(x_i, y_i, z_i, \dots) \\y_{i+1} &= G(x_i, y_i, z_i, \dots) \\z_{i+1} &= H(x_i, y_i, z_i, \dots) \\&\vdots\end{aligned}$$

missä x , y , z jne. ovat systeemin dynaamisia muuttujia ja F , G , H jne. dynamiikan määrittäviä funktioita. Näitä funktioita emme yleensä tunne, mutta voimme yrittää ratkaista ne tutkimalla mitattuja aikasarjoja. Jos muuttujia on vain yksi, ryhmä sievennyy muotoon

$$x_{i+1} = F(x_i).$$

Koska tämä yhtälö sitoo muuttujan uuden arvon x_{i+1} sen edelliseen arvoon x_i , saamme periaatteessa funktion F selville sijoittamalla aikasarjan pisteet x-y-kuvaukseen siten, että vaak akselilla on aina edellinen arvo ja y-akselilla sitä seuraava. Tällaista kuvausta kutsutaan paluukuvaukseksi tai Poincare-kuvaukseksi. Jos kuvaus on tarkasti yllä esitettyä muotoa ja datapisteitä on riittävän paljon, funktion F muoto paljastuu. Kuvassa 11 on esitetty ns. logistisen kuvauksen tuottama aikasarja sekä sen paluukuvaus. Koska kuvaus on yksiulotteinen eli sillä on vain yksi dynaaminen muuttuja, paluukuvaus paljastaa suoraan funktion F , joka tässä tapauksessa on paraabeli.



Kuva 11. Logistisen kuvauksen $x_{i+1} = 4x_i(1-x_i)$ tuottama aikasarja (a) sekä siitä muodostettu paluukuvaus (b).

RM käytännössä

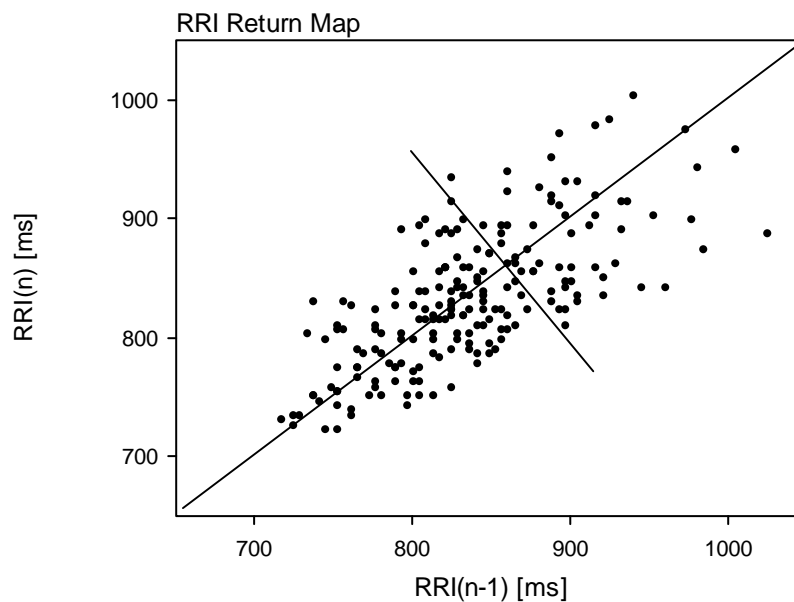
Jos aikasarjan takana oleva dynaaminen systeemi ei ole yksiulotteinen, eli siinä vaikuttaa useita muuttujia, ei yhdestä mitatusta muuttujasta muodostettu paluukuvaus pysty luonnollisestikaan ratkaisemaan funktioita F , G jne. Tässäkin tapauksessa yhden muuttujan paluukuvaus voi kuitenkin olla hyödyllinen, vaikkakin se on eräänlainen projektio moniulotteisesta systeemistä yhteen ulottuvuuteen. Kuvassa 12 on esitetty RRI-aikasarjan paluukuvaus. Sille on tyypillistä pisteiden sijoittuminen hajanaisesti ellipsin muotoon, mutta pisteet voivat myös muodostaa hyvinkin mutkikkaita rakenteita. Kun pisteet ovat ellipsin kaltaisella alueella, sen muotoa voidaan karakterisoida kahdella hajontaluvulla: hajonta diagonaaln suunnassa eli SD2, ja sitä kohtisuorassa suunnassa SD1. Nämä hajontaluvut ovat luonteeltaan eräänlaisia variabiliteettisuureita, sillä ne mittaavat systeemin liikkumista faasiavaruudessa.

RM:n etuja

- Menetelmä ei sinänsä oleta mitään systeemin luonteesta, mutta sen rajoitukset moniulotteisten systeemin kuvauksessa pitää muistaa.

RM puutteita

- Hajontaluvut SD1 ja SD2 eivät välttämättä kuvaa paluukuvauspistejoukon todellista muotoa kovinkaan hyvin.



Kuva 12. RRI-aikasarjasta muodostettu paluukuvaus. Hajonta diagonaaln suunnassa SD2 = 111 ms ja sitä kohtisuorassa suunnassa SD1 = 34 ms.

Viitteitä

Huikuri H. V. et al. Abnormalities in beat-to-beat dynamics of heart rate before the spontaneous onset of life-threatening ventricular tachyarrhythmias in patients with prior myocardial infarction. *Am. J. Cardiol.* **77**: 1073 – 1077, 1996

Woo M. A., Stevenson W. G., Moser D. K., Middlekauf H. R. Complex heart rate variability and serum norepinephrine levels in patients with advanced heart failure. *J. Am. Coll. Cardiol.* **23**: 565 – 569, 1994

11. Detrended Fluctuation Analysis (DFA)

DFA:ta käytetään mittaamaan aikasarjan sisäisiä korrelaatioita. Biologisille systeemeille on tyypillistä, että korrelaatiot ovat erilaisia eri aikaskaaloissa, ja DFA antaa mahdollisuuden tämän karakterisointiin korrelaatioetäisyyden funktiona.

DFA lasketaan seuraavasti. Alkuperäisestä aikasarjasta $\{x(i)\}$, $i = 1 \dots N$, muodostetaan ensiksi integroitu versio

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x(i) - \langle x \rangle),$$

missä $\langle x \rangle$ on alkuperäisen aikasarjan keskiarvo, ja $k = 1 \dots N$. Seuraavaksi $\{y(k)\}$ aikasarja jaetaan tasavälisesti segmentteihin, joiden pituus on n . Kussakin segmentissä haetaan sille oma paikallinen trendi sovittamalla segmenttiin regressiosuora $y_n(k)$. Integroidun aikasarjan RMS (root-mean-square) fluktuatio lasketaan poistamalla kussakin segmentissä sen lineaarinen trendi, eli

$$DFA(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}.$$

Summauksessa on huomattava, että kun indeksia k juoksetaan, pitää $y_n(k)$ vaihtaa aina siirryttäessä seuraavaan segmenttiin. DFA lasketaan useilla eri segmentin pituuden n arvoilla. Tyypillisesti DFA kasvaa, kun segmentin pituus kasvaa. Jos $\log DFA$ kasvaa lineaarisesti $\log n$:n funktiona, aikasarja noudattaa (fraktaalista) skaalauslakia, ja tällöin ko. lineaarisen muutoksen kulmakerroin α määrää, minkälaisesta skaalauksesta on kysymys. Eri α :n arvot vastaavat seuraavanlaisia aikasarjan perustyyppisiä:

$0 < \alpha < 0.5$	pienen arvon jälkeen tulee todennäköisimmin suuri arvo ja päinvastoin
$\alpha = 0.5$	täysin korreloimaton aikasarja eli valkoista kohinaa
$0.5 < \alpha < 1.0$	pienen arvon jälkeen tulee todennäköisimmin pieni ja suuren jälkeen suuri
$\alpha = 1.0$	$1/f$ kohinaa
$1.0 < \alpha < 1.5$	vaihtelevan tyyppistä kohinaa
$\alpha = 1.5$	Brownin $1/f^2$ kohinaa (valkoisen kohinan integraali)

Kun $\alpha > 1.0$, kyseessä on aina kohinan luonteinen signaali, mutta se sisältää kuitenkin korrelaatioita, jotka näkyvät selkeimmin signaalin spektrissä: spektri ei ole tasainen, vaan se putoaa nopeasti taajuuden kasvaessa.

DFA käytännössä

DFA:n tyypillisin käyttökohde on pitkien RRI-aikasarjojen analysointi. Sykkeellä on lyhyen kantaman korrelaatioita, jotka muodostuvat mm. barorefleksimekanismista, sekä pitkän kantaman korrelaatioita, jotka pyrkivät pitämään sykkeen vaihtelualueen tietyissä rajoissa. Pitkän kantaman korrelaatioiden mittaaminen edellyttää, että tutkittava aikasarja on varsin pitkä, mieluummin vähintään muutaman tunnin pituinen, jotta tilastollinen luotettavuus olisi edes kohtuullinen.

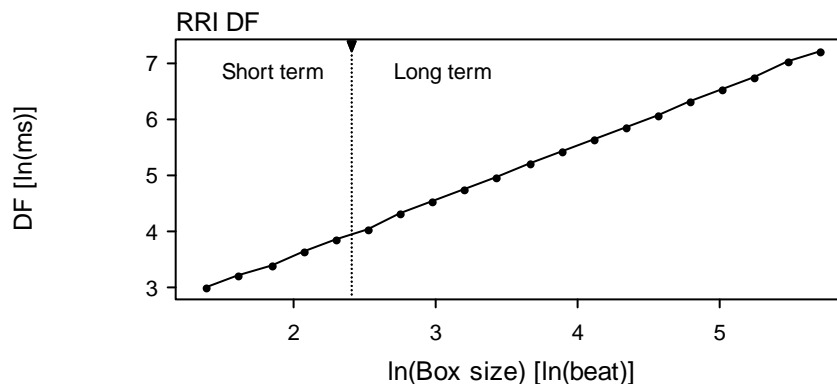
Kuvassa 13 on tyypillinen DFA pitkälle RRI-aikasarjalle. Lyhyen ja pitkän kantaman korrelaatioiden raja asetetaan yleensä kohtaan 10 tai 11 sykettä (vastaa \ln -asteikolla arvoa 2.4). Pitkän kantaman skaalauseksponentti α_L on terveellä potilaalla ≈ 1 , mikä vastaa $1/f$ käyttäytymistä. Lyhyen kantaman skaalauseksponentti α_S voi vaihdella, mutta on yleensä 0.5 – 1.5. Tähän vaikuttavat monet tekijät, kuten barorefleksimekanismin toiminta, hengitysmodulaatio jne.

DFA:n etuja

- Menetelmä ei edellytä systeemiltä mitään erityispiirteitä.
- Antaa mahdollisuuden systeemien selkeään luokitteluun.

DFA:n puutteita

- Pitkillä aikasarjoilla on aina mahdollista, että mitatut korrelaatiot eivät ole pelkästään tai lainkaan systeemin ominaisuus, vaan heijastavat pikemminkin ympäristön vaikutusta.



Kuva 13. DFA 8 tunnin mittaisesta RRI-aikasarjasta. Lyhyen kantaman korrelaatioita vastaava skaalauseksponentti $\alpha_S = 0.950$ ja pitkän kantaman vastaava $\alpha_L = 0.998$.

Viitteitä

Peng C-K., Mietus J., Hausdorff J. M., Havlin S., Stanley H. E., Goldberger A. L. Long-range anticorrelations and non-gaussian behaviour of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.* **70**: 1343 – 1346, 1993

Peng C-K., Havlin S., Stanley H. E., Goldberger A. L. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *CHAOS* **5**: 82 – 87, 1995

Iyengar N., Peng C-K., Morin R., Goldberger A. L., Lipsitz L. A. Age-related alterations in the fractal scaling of cardiac interbeat interval dynamics. *Am. J. Physiol.* **271** (Regulatory Integrative Comp. Physiol): R1078 – R1084, 1996

12. Spectrum Power-Law (SPL)

Aikasarjan pitkän kantaman korrelaatioita voidaan analysoida myös käyttäen lähtökohtana signaalin spektriä. Tällöin tutkitaan spektrin kaikkein alhaisimpia taajuuskomponentteja ja pyritään karakterisoimaan yksinkertaisen potenssilain puitteissa sen muotoa.

Jos oletetaan, että jollakin taajuusalueella spektri on muotoa $1/f^\beta$, skaalauseksponentti β saadaan esittämällä spektri log-log-asteikolla ja sovittamalla suora yli halutun taajuusalueen; suoran kulmakerroin on haluttu eksponentti. Eksponentin arvo vaihtelee yleensä välillä 0 – 2. Rajatapaus 0 vastaa tasaista, keskimäärin vakiona pysyvää spektriä eli valkoista kohinaa, ja 2 ns. Brownin kohinaa.

SPL käytännössä

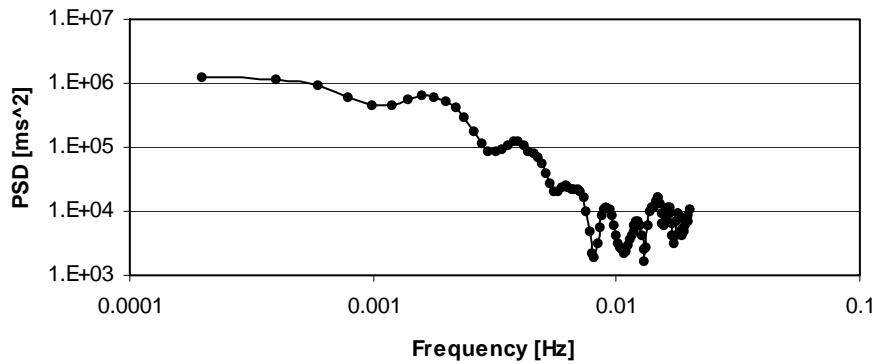
Spektrissä tarkastellaan yleensä taajuusaluetta 0.0001 – 0.01 Hz, mikä vastaa oskillaation periodin pituutta minuutista muutama tuntiin. Jotta määrittäminen olisi mielekäs, pitää aikasarjan siis olla useiden tuntien mittainen. Spektri lasketaan lähes poikkeuksetta käyttäen FFT-algoritmia. Koska spektri on erityisesti pienimmillä taajuuksilla hyvinkin “rosoinen”, on jonkin tasoitusmenetelmän käyttö suotavaa. Myöskin regressiosuoran korvaaminen vähemmän herkällä sovitusmenetelmällä voi parantaa lopputuloksen luotettavuutta.

SPL:n etuja

- Menetelmä ei perustu signaalin amplitudin vaihtelun suuruuteen, vaan spektrin erityiseen muotoon matalilla taajuuksilla.

SPL:n puutteita

- Usein spektri ei kovinkaan hyvin ole kuvattavissa potenssilaila, jolloin skaalauseksponentti β ei enää kuvaa todellisuutta.



Kuva 14. Spektri laskettuna 4 tunnin mittaisesta RRI-aikasarjasta esitettynä log-log-asteikolla. On tyypillistä, että spektri ei muutu lineaarisesti taajuuden funktiona, mutta kohtuullisen hyvin siihen kuitenkin voidaan sovittaa regressiosuora taajuusvälille 0.0001 – 0.01 Hz, jolloin kulmakertoimeksi saadaan 1.823. Tulos merkitsee, että aikasarjaa voidaan kuvailla lähinnä Brownin kohinaksi.

Viitteitä

Bigger J. T., Steinman R. C., Rolnitzky L. M., Fleiss J. L., Albrecht P., Cohen R. J. Power law behaviour of RR-interval variability on healthy middle-aged persons, patients with recent acute myocardial infarction, and patients with heart transplants. *Circulation* **93**: 2142 – 2151, 1996

Iyengar N., Peng C-K., Morin R., Goldberger A. L., Lipsitz L. A. Age-related alterations in the fractal scaling of cardiac interbeat interval dynamics. *Am. J. Physiol.* **271** (Regulatory Integrative Comp. Physiol): R1078 – R1084, 1996

13. Spectral Entropy (SEn)

Spektrin luonnetta voidaan myös karakterisoida yhdellä tunnusluvulla tulkitsemalla spektraalitiheys todennäköisyysjakaumaksi. Tällöin voidaan määritellä ns. Shannonnin entropia muodossa

$$SEn = -\sum_f p_f \ln p_f ,$$

missä todennäköisyydet p_f määritellään normeerattuina spektraalitiheyksinä (PSD), eli

$$p_f = \frac{PSD(f)}{\sum_{f=0}^{f_{\max}} PSD(f)} .$$

Käytännössä spektraalitiheydet lasketaan yleensä käyttäen FFT-rutiinia, mutta myös AR-metodi on mahdollinen, tällöin kuitenkin mallin oikean kertaluvun valinta voi tuottaa suuria vaikeuksia. Jotta saatu entropiasuure olisi riippumaton spektraalitiheyden taajuuskomponenttien lukumäärästä (spektrihän on käytännössä aina diskreetti), entropia normeerataan tavallisesti komponenttien lukumäärän logaritmillä, jolloin SEn saa arvoja välillä 0 .. 1. SEn kuvastaa sitä, minkälainen on signaalin spektrin rakenne. Jos se sisältää vain yhden tai muutaman selkeän erillisen taajuuskomponentin, SEn saa matalia arvoja; toisaalta laajakaistaiselle kohinalla SEn on korkea.

SEn käytännössä

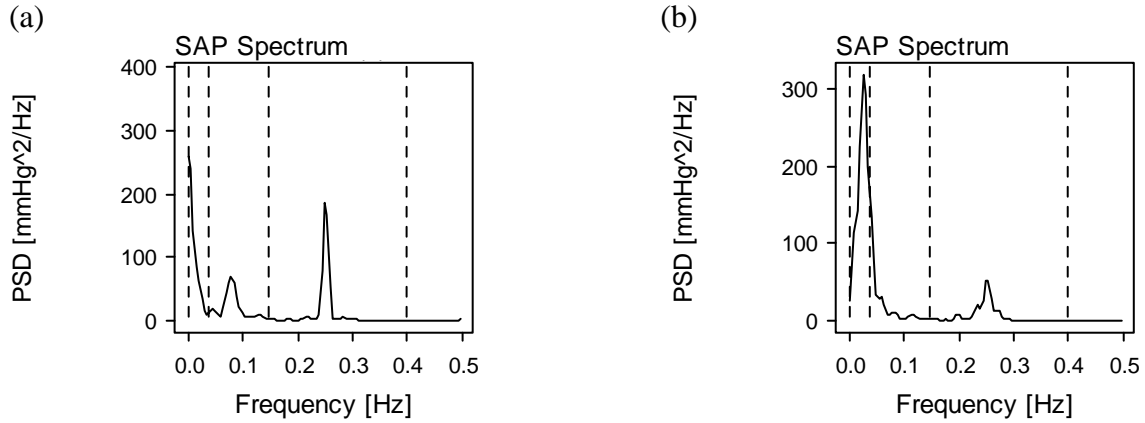
SEn on käytännössä helppo ja nopea laskea FFT-rutiinilla, ja se ei edellytä erityisen pitkiä aikasarjoja, mutta kovin lyhyillä aikasarjoilla sen tilastollinen luotettavuus on luonnollisesti huono. Koska SEn karakterisoi spektrin yleistä muotoa, se ei pysty erottamaan kaaosta ja kohinaa toisistaan. Jos signaali on luonteeltaan epästationäärinen, matalat taajuuskomponentit saattavat dominoida SEn-suuretta, siksi sen käytettävyys voi olla rajoitettua erityisesti RRI- ja SAP-tyyppisillä signaaleilla, mutta hyvinkin käyttökelpoinen esim. EEG-aikasarjan karakterisoinnissa.

SEn:n etuja

- Helppo laskea
- Ei edellytä pitkiä aikasarjoja

SEn:n puutteita

- Varsin epäspesifinen tunnusluku



Kuva 15. RRI-signaalin spektrit mitattuna koehenkilöstä, joka on hengittänyt metronomin mukaan (a), jolloin $SEn = 0.647$, ja spontaanisti (b), jolloin $SEn = 0.731$. Spektraalientropiat on laskettu LF- ja HF-kaistojen yli, jotta matalimmat, todennäköisesti epästationärisyydestä johtuvat, taajuuskomponentit eivät vaikuttaisi tulokseen.

Viitteitä

Rezek I. A., Roberts S. J. Stochastic complexity measures for physiological signal analysis. *IEEE Trans. Biom. Eng.* **45**: 1186 – 1191, 1998

Steyn-Ross D. A., Steyn-Ross M. L., Wilcocks L. C. Toward a theory of the general-anesthetic-induced phase transition of the cerebral cortex. II. Numerical simulations, spectral entropy, and correlation times. *Phys. Rev E* **64**: 011918, 2001

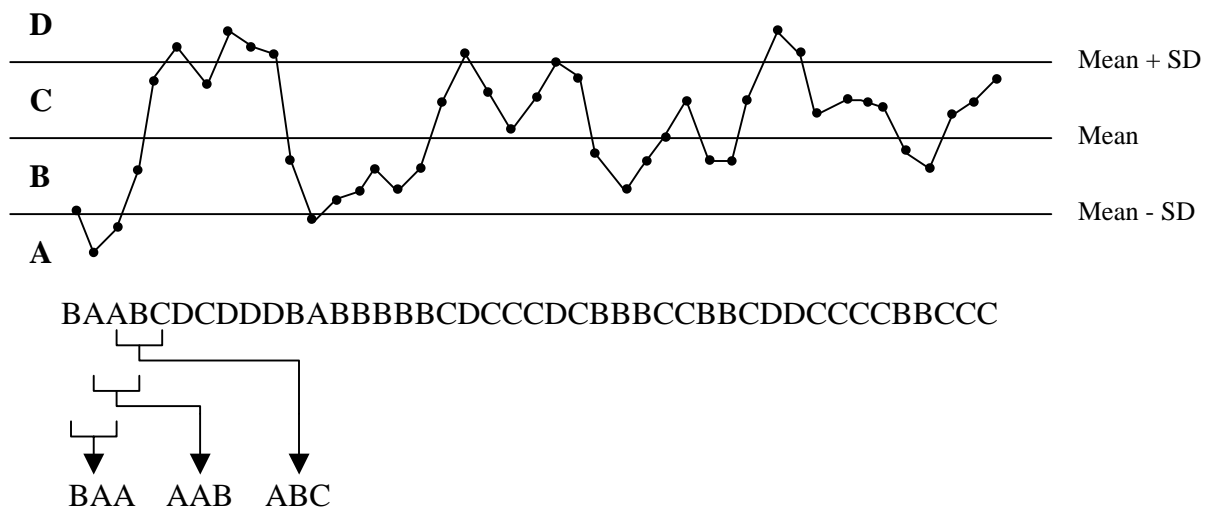
14. Symbolic Dynamics (SymDyn)

Tämän menetelmän perusajatus on, että alkuperäinen aikasarja korvataan huomattavasti yksinkertaisemmalla ja karkeammalla vastineella, joka kuitenkin säilyttää oleelliset dynaamiset piirteet. Tämä tehdään muuntamalla aikasarja jonoksi symboleita, joita on vain muutama erilainen. Tällöin dynamiikan tutkiminen redusoituu symbolijonojen käsittelyksi. Muunnoksessa luonnollisesti häviää suurin osa alkuperäisen aikasarjan sisältämästä informaatiosta, mutta tärkeät ominaisuudet pyritään säilyttämään.

Aikasarjan muuntaminen symbolijonoksi voidaan tehdä useilla eri tavoilla. Eräs sellainen on kuvattu kuvassa 15. Riippuen siitä, kuinka montaa symbolia halutaan käyttää, signaali jaetaan kahteen tai useampaan arvoalueeseen. Arvoalueet voivat olla absoluuttisia kaistoja tai signaalin keskiarvoon ja standardihajontaan SD perustuvia. Jos symboleja on esimerkiksi 4 erilaista, voidaan käytetään seuraavia kaistoja:

- A** signaali \leq keskiarvo $-$ SD
- B** keskiarvo $-$ SD $<$ signaali \leq keskiarvo
- C** keskiarvo $<$ signaali \leq keskiarvo $+$ SD
- D** signaali $>$ keskiarvo $+$ SD

Kun kaistat on valittu, voidaan aikasarja muuntaa symbolijonoksi. Seuraavaksi symbolijono ryhmitetään *sanoiksi*. Sana muodostetaan aina siten, että symbolijonossa edetään yhden symbolin verran eteenpäin. Jos valitaan sanan pituudeksi 3 symbolia ja symboleja on 4 erilaista, saadaan erilaisten sanojen lukumääräksi $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Kukin sana vastaa tiettyä signaalissa esiintyvää kuviota, jolla on ainakin karkea yhteys taustalla vaikuttavaan dynamiikkaan.



Kuva 16. Aikasarjan muuntaminen symbolijonoksi ja symbolijonon ryhmittäminen sanoiksi.

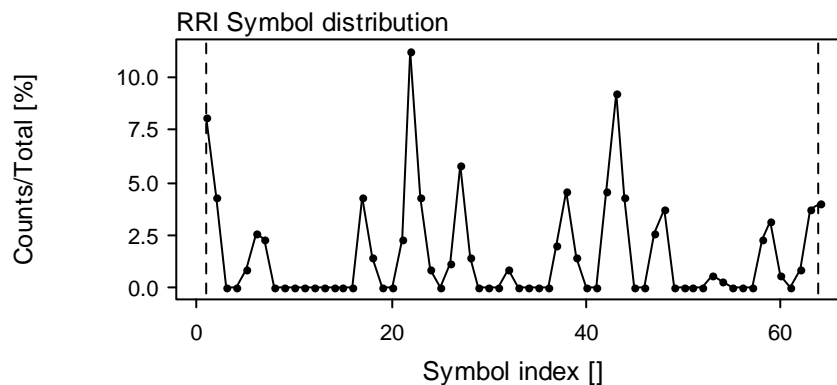
Eri sanat eivät ole yhtä todennäköisiä, sillä dynamiikka suosii tiettyjä kuvioita. Jotta voitaisiin tutkia tätä ominaisuutta tarkemmin, laaditaan sanoista jakauma. Jaukauman esittämistä varten sanat pitää järjestää jollakin tavalla. Jos symboleja on 4 ja sanan pituus on 3, sanat voidaan järjestää seuraavalla tavalla:

- | | | | | | |
|----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1. | AAA | 5. | ABA | 9. | ACA |
| 2. | BAA | 6. | BBA | ... | |
| 3. | CAA | 7. | CBA | 63. | CDD |
| 4. | DAA | 8. | DBA | 64. | DDD |

Kuvassa 16 on tyypillinen RRI-aikasarjan sanojen todennäköisyysjakauma. Tiedyt kuviot ovat selvästi muita todennäköisempiä. Jakauman muoto itsessään voi toimia analyysin pohjana, mutta on myös mahdollista mitata jakaumaan liittyvää järjestäytymisen astetta. Yksinkertaisin tällainen mitta on ns. Shannonin entropia

$$S = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i ,$$

missä p_i on kunkin sanan todennäköisyys ja n erilaisten sanojen lukumäärä. Entropia voidaan normeerata siten, että se ilmoitetaan joko bitteinä/sana tai jaettuna vastaavien binäärisanojen lukumäärällä, jolloin $0 \leq S \leq 1$. Jakauman rakennetta kuvaa myös ns. kiellettyjen sanojen eli sanojen, joiden todennäköisyys < 0.001 , suhteellinen osuus kaikista sanoista.



Kuva 17. 5 minuutin mitaisen RRI-aikasarjan todennäköisyysjakauma. Jakaumaa muodostettaessa on käytetty 4 eri symbolia ja sanan pituus on 3. Shannonin entropia = 4.543 bit/sana ja normalisoituna 0.757 sekä kiellettyjen sanojen osuus 52 %. 6 todennäköisintä sanaa ovat BBB, CCC, AAA, CCB, BBC ja BCC. Kaistat on jaoteltu hajonnan avulla.

SymDyn käytännössä

Erilaisten symbolien lukumäärä on yleensä 2 – 6 ja sanojen pituus 2 - 4. Signaalin arvoaluekaistojen valinnassa hajonnan käyttäminen mittana on parempi, koska silloin tulokset ovat vähemmän riippuvaisia absoluuttisesta vaihtelusta. Kun parametreja valitaan, pitää muistaa, että aikasarja on oltava riittävän pitkä, jotta jakauma sisältäisi tarpeeksi sanoja.

Esimerkiksi RRI-aikasarjan kohdalla pidetään normaalina sitä, että jakauma on suhteellisen tasainen, jolloin kiellettyjen sanojen osuus on pieni; patologisissa tapauksissa jakaumaa dominoi muutama yksittäinen sana.

SymDyn:n etuja

- Riippumaton systeemin dynamiikan luonteesta.
- Nopea laskea.

SymDyn:n puutteita

- Herkkä aikasarjan trendeille, koska kaistojen määrittely perustuu absoluuttisiin arvoihin.
- Jakauman muodon tulkitseminen on hankalaa.

Viitteitä

Voss A., Kurths J., Kleiner H. J., Witt A., Wessel N. Improved analysis of heart rate variability by methods of nonlinear dynamics. *J. Electrocardiol.* **28**: 81 – 88, 1995

Voss A. et al. The application of methods on non-linear dynamics for the improved and predictive recognition of patients threatened by sudden cardiac death. *Cardiovascular Research* **31**: 419 – 433, 1996

Palazzolo J. A., Estafanous F. G., Murray P. A. Entropy measures of heart rate variation in conscious dogs. *Am. J. Physiol* **274** (Heart. Circ. Physiol.): H1099 –H1105, 1998

15. Lempel-Ziv Entropy (LZEn)

Symbolijonon kompleksisuus voidaan mitata myös suoraan ilman jakauman käyttöä määrittelemällä ns. Kolmogorov-entropia: jonon kompleksisuus on yhtä kuin sen lyhimmän tietokoneohjelman (yleisesti algoritmin), joka pystyy kyseisen jonon tuottamaan, pituus bitteinä. Jos ohjelma on lyhyt, kompleksisuus on pieni ja päinvastoin. Määrittely on intuitiivisesti mielekäs, mutta käytännössä mahdoton laskea ilman erityisiä rajoituksia.

Kun edellisen kappaleen symbolijono muodostetaan käyttäen vain kahta symbolia, saadaan itse asiassa binäärijono, jonka symboleiksi valitaan merkit 0 ja 1. Tällainen jono voidaan konstruoida käyttäen vain kahta operaatiota, yksittäisen symbolin insertointia ja symbolialijonon kopiointia. Tällöin jonon ns. Lempel-Ziv kompleksisuus voidaan laskea. Esimerkiksi yksinkertaisin jono

00000 ...

saadaan konstruotua kahdella operaatiolla: ensiksi insertoidaan yksi nolla ja loppuosa tehdään sitä kopioimalla. Jonon kompleksisuus on 2. Samoin jono

01 01 01 ...

saadaan insertoimalla 0 ja 1, ja kopioimalla jonoa 01 saadaan loput jonosta rakennettua. Kompleksisuus on tällöin 3. Vastaavalla tavalla voidaan minkä tahansa binäärijonon kompleksisuus määrittää, tosin tarvittava algoritmi on hieman mutkikas eikä sitä esitetä tässä.

Voidaan osoittaa, että satunnaisen K kpl erilaista symbolia sisältävän, n -mittaisen jonon kompleksisuus on

$$b(n) = \frac{hn}{\log_K(n)},$$

missä h on ns. normalisoitu lähde-entropia

$$h = \frac{-1}{\log(n)} \sum_{i=1}^n p_i \log p_i,$$

suureet p_i ovat kunkin symbolin todennäköisyys jonossa. Kun jonossa on vain kaksi symbolia ja ne ovat yhtä todennäköisiä, $h = 1$ ja $b(n) = n/\log_2(n)$. Kun tutkittavan binäärijonon kompleksisuus normeerataan suureella $b(n)$, saadaan jonon pituudesta riippumaton entropiasuure LZEn, $0 \leq \text{LZEn} \leq 1$.

LZEn käytännössä

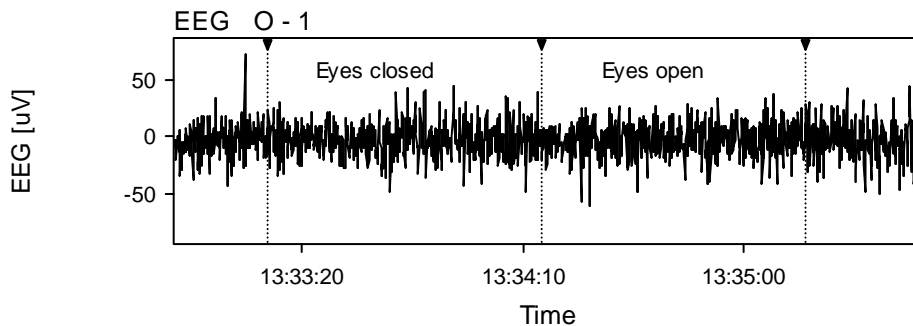
Binäärijono muodostetaan aikasarjasta yleensä siten, että keskiarvon alapuolella olevat arvot vastaavat symbolia 0 ja yläpuolella olevat symbolia 1. LZEn voidaan laskea miten lyhyelle jonolle tahansa, mutta luonnollisesti lyhyelle jonolle sen tilastollinen luotettavuus on huono. On lisäksi myös huomattava, että normeerattu entropia on jonon pituudesta riippumaton vasta, kun jonon pituus on >1000 .

LZEn:n etuja

- Menetelmä on täysin yleinen aikasarjan karakterisointimenetelmä.

LZEn:n puutteita

- Symbolijonon muodostaminen aikasarjasta onnistuu kunnolla vain silloin, kun signaalin keskimääräinen arvo ei muutu.



Kuva 18. EEG-signaali, kytteä O1-A2. Kun potilaan silmät ovat kiinni, LZEn = 0.889 ja kun silmät ovat auki, LZEn = 0.940. Aivojen aktiivisuustason muutos ilmenee kompleksisempänä signaalina.

Viitteitä

Kaspar F., Schuster H. G. Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns. *Phys. Rev. A* **36**: 842 – 848, 1987

Zhang X-S., Roy R. J. Predicting movement during anaesthesia by complexity analysis of electroencephalograms. *Med. Biol. Eng. Comput.* **37**: 327 – 334, 1999

16. Stationarity (StatAv)

Signaalin stationäärisyyden arvioimiseksi on useita menetelmiä riippuen siitä, miten stationäärisyys halutaan määritellä. Stationäärisyys voi tarkoittaa sitä, että signaalin perustasossa ei tapahtu liukumista, tai signaalin amplitudijakauma, spektri tai autokorrelaatiofunktio ei muutu ajan mukana. Yleisemmin voidaan sanoa, että signaali on stationäärinen, jos sen tuottavan systeemin toimintapisteen määräävät parametrit pysyvät vakiona. Käytännössä tämän arviointi on erittäin vaikeaa.

Eräs yksinkertainen stationäärisyydesti, joka testaa lähinnä perustason muutoksia, on seuraavanlainen. Signaali jaetaan sopivan mittaisiin segmentteihin ja kussakin segmentissä lasketaan signaalin keskiarvo. Kun näiden keskiarvojen standardihajonta jaetaan koko signaalin standardihajonnalla, saadaan mitta stationäärisyydelle, StatAv. Jos StatAv on pieni, signaali on stationäärinen.

StatAv käytännössä

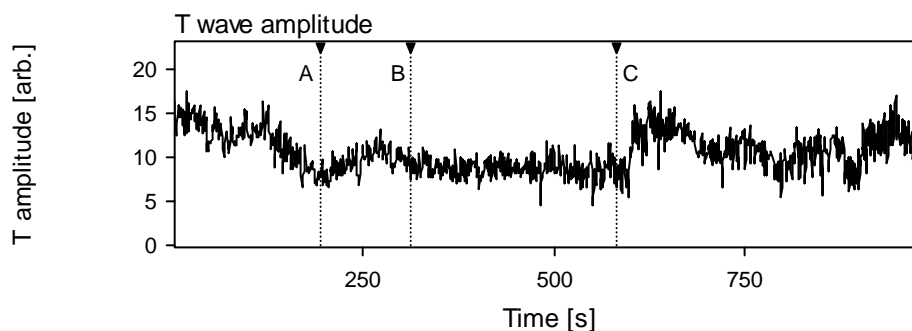
Segmentin pituus pitää valita siten, että se ei ole liian pitkä, jotta paikalliset muutokset tunnistettaisiin, mutta ei myöskään liian pieni, jotta keskiarvot segmenteissä eivät vaihtelisi liian paljon. Esimerkiksi RRI-signaalille hyvä valinta on 20 datapistettä/segmentti. Jos $\text{StatAv} < 0.3$, signaalia voidaan pitää kohtuullisen stationäärisenä.

StatAv:n etuja

- Erittäin yksinkertainen ja nopea laskea.

StatAv:n puutteita

- Tunnistaa lähinnä vain perustason muutoksia.



Kuva 19. T-aallon amplitudi ajan funktiona. Välillä A-C $\text{StatAv} = 0.604$, mutta välillä B-C $\text{StatAv} = 0.293$. Menetelmä tunnistaa hyvin perustason muutokset.

Viitteitä

Palazzolo J. A., Estafanous F. G., Murray P. A. Entropy measures of heart rate variation in conscious dogs. *Am. J. Physiol* **274** (Heart. Circ. Physiol.): H1099 –H1105, 1998

17. Fractional Spectral Radius (FSR)

Signaalin taustalla olevan systeemin rakennetta voidaan selvittää tarkemmin konstruoimalla lokaali rakennematriisi käyttäen jo aikaisemmin esiteltyjä pseudofaasiavaruuden vektoreita, jotka muodostetaan mitatusta aikasarjasta käyttäen viivästettyjä koordinaatteja. Rakennematriisi kuvaa kussakin radan pisteessä, miten systeemi käyttäytyy. Käytännössä on helpompi analysoida systeemiä tarkastelemalla rakennematriisia, joka on keskimääräistetty yli systeemin radan (tai sopivan aikavälin, jos halutaan tutkia sen muuttumista ajassa). Tällöin saadaan ns. kovarianssimatriisi

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i x_i & \sum_{i=1}^N x_i x_{i+1} & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i x_{i+m-1} \\ \sum_{i=1}^N x_{i+1} x_i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^N x_{i+m-1} x_i & \cdots & & \sum_{i=1}^N x_{i+m-1} x_{i+m-1} \end{pmatrix},$$

missä $\{x_i\}$ on tutkittava aikasarja, N datapisteiden lukumäärä ja m upotusdimensio. Kovarianssimatriisi kertoo, miten systeemi käyttäytyy pitkin rataa keskimäärin, mutta koska se sisältää m^2 lukua, sen käyttö sellaisenaan aikasarjojen analysoinnissa on hankalaa. Laskemalla matriisin ominaisarvot ja -vektorit voimme löytää sellaisen koordinaatiston, jossa matriisi on diagonaalinen; ominaisvektorit määräävät tällöin uuden koordinaatiston, jossa systeemin kuvauksesta tulee mahdollisimman yksinkertainen. Ominaisarvot σ_i , $i = 1 \dots m$, toisaalta antavat mahdollisuuden määrittää, miten merkittävää liike on kussakin koordinaattisuunnassa. Sellaiset ominaisarvot, jotka ovat nolliä tai lähellä nolliä, vastaavat koordinaatteja, jotka ovat kuvauksen kannalta epärelevantteja. Tämä tarkoittaa sitä, että valittu upotusdimensio m on ollut "liian" iso, systeemin kuvaamiseen riittää vähemmänkin muuttujia. Tutkimalla ominaisarvojen jakaumaa voimme siis myös arvioida systeemin todellista dimensiota ja sitä kautta sen kompleksisuutta.

Koska ominaisarvojakini on m kappaletta, on edelleenkin tarpeen yksinkertaistaa tarkastelua. Järjestämällä ominaisarvot laskevaan järjestykseen (koska kovarianssimatriisi on symmetrinen, sen kaikki ominaisarvot ovat positiivisia tai nolliä) voimme määrittellään uuden mitan systeemin kompleksisuudelle

$$FSR(j) = \frac{\sum_{i=1}^j \sigma_i}{\sum_{i=1}^m \sigma_i}.$$

eli ns. ominaisarvojen spektraalisäteen.

FSR käytännössä

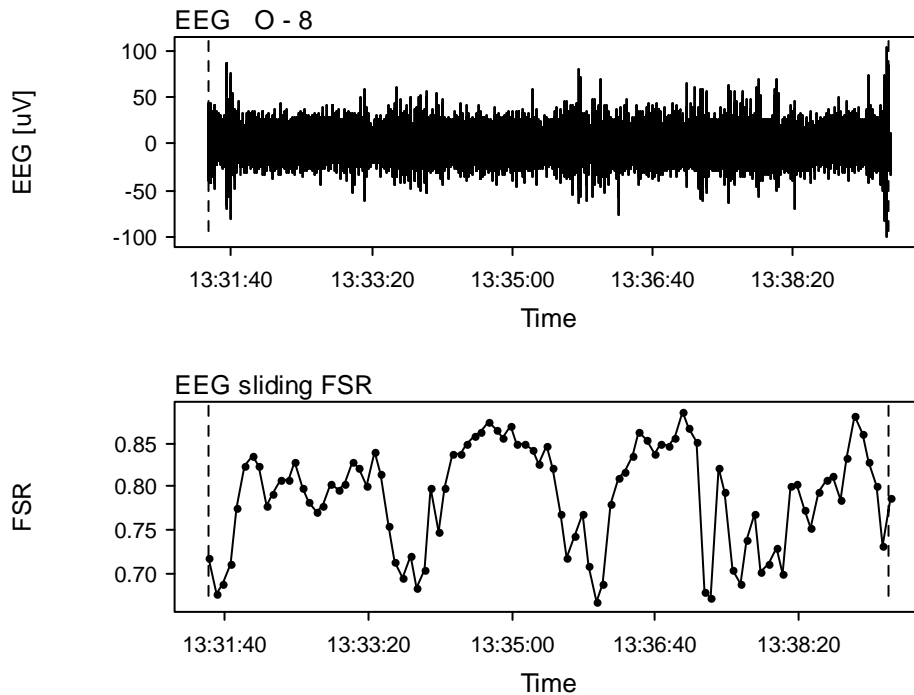
Jos systeemi on stationäärinen ja se ei sisällä lainkaan kohinaa, nolasta poikkeavia ominaisarvoja on tarkalleen niin monta kuin on systeemin dimensio. Todellisuudessa tilanne ei kuitenkaan ole näin selkeä, vaan aina mukana olevan kohinan takia kaikki ominaisarvot poikkeavat nolasta. Valitsemalla $j = 1$ eli laskemalla suure $FSR(1)$ saadaan tietoa siitä, miten paljon “tehoa” on muissa suunnissa verrattuna suurimman ja samalla merkittävimmän ominaisarvon määräämään suuntaan. Jos systeemillä on lukuisia riippumattomia muuttujia, $FSR(1)$ lähestyy nolaa, ja jos vain muutama muuttuja on merkityksellinen, $FSR(1)$ lähestyy ykköstä. Näin $FSR(1)$ mittaa systeemin kompleksisuutta (huom. arvo 1 vastaa siis pienidimensioista systeemiä ja alhaista kompleksisuutta, eli päinvastoin kuin entropiasuureilla).

FSR:n etuja

- Menetelmä ei edellytä tutkittavalta syteemiltä mitään erityisluonnetta
- Laskennallisesta mutkikkuudestaan huolimatta menetelmä on käytännössä kuitenkin varsin nopea

FSR:n puutteita

- Upotusdimension ja erityisesti viiveen valinta ovat jossain määrin kriittisiä



Kuva 20. EEG-signaali ja siitä laskettu liukuva FSR(1). Laskuissa on käytetty ikkunan leveytenä 10 sekuntia ja ikkunaa on siirretty aina 5 sekuntia eteenpäin, upotusdimensio on 25 ja aikaviive 40 ms.

Viitteitä

Rezek I. A., Roberts S. J. Stochastic complexity measures for physiological signal analysis. *IEEE Trans. Biom. Eng.* **45**: 1186 – 1191, 1998

Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica* **20D**: 217-236, 1986